

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

Praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. IX

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Pracoval: Matyáš Řehák stud.sk.: 16 dne: 27.3.2008

Odevzdal dne:

Hodnocení:

Připomínky:

| kapitola referátu | možný počet bodů | udělený počet bodů |
|---------------------------|------------------|--------------------|
| Teoretická část | 0 - 3 | 3 |
| Výsledky měření | 0 - 9 | 7 |
| Diskuse výsledků | 0 - 5 | 4 |
| Závěr | 0 - 2 | 2 |
| Seznam použité literatury | 0 - 1 | 1 |
| Celkem | max. 20 | 17 |

Posuzoval:.....

dne:

Pracovní úkol

- 1) Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
- 2) Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a mosazi z průhybu trámku.
- 3) Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

Teorie

Protažení drátu

Prodloužení drátu Δl délky l a průřezu S , pokud na něj působí síla F je dáno výrazem [1]:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S}, \quad (1)$$

kde E je modul pružnosti v tahu, který lze vyjádřit:

$$E = \frac{l_0 F}{\Delta l S}. \quad (2)$$

K měření použijeme zrcátkovou metodu. Drát je na jednom konci veden přes kladku o poloměru R k misce, na kterou se kladou závaží. V ose kladky je upevněno zrcátko. Tímto způsobem se prodloužení drátu převádí na pootočení zrcátka. Úhel pootočení zrcátka $\Delta\alpha$ souvisí s prodloužením drátu vztahem:

$$\Delta l = R\Delta\alpha. \quad (3)$$

Ve vzdálenosti L od zrcátka je umístěna rovnoměrně osvětlená stupnice tak, aby bylo možné dalekohledem sledovat odraz stupnice v zrcátku. V rovnovážné poloze je v dalekohledu vidět dílek n_0 , po otočení zrcátka o úhel $\Delta\alpha$ dílek n . Pro vzdálenost $n - n_0$ platí:

$$\operatorname{tg}(2\Delta\alpha) = \frac{n - n_0}{L}. \quad (4)$$

Z toho:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{n - n_0}{L}\right). \quad (5)$$

Průhyb trámku

Trámek obdélníkového průřezu je podepřen dvěma břity ve vzdálenosti l . Při zatížení trámku uprostřed silou F vznikne v působišti síly průhyb y , pro který platí [1]:

$$y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (6)$$

kde I_p je plošný moment setrvačnosti průřezu tyče vzhledem k vodorovné ose, kolmé k délce trámku a procházející těžištěm. Pro obdélníkový průřez trámku výšky b a šířky a je možné jej vyjádřit:

$$I_p = \frac{ab^3}{12}, \quad (7)$$

z (6) a (7) získáme vztah pro určení modulu pružnosti E :

$$E = \frac{Fl^3}{4yab^3}. \quad (8)$$

Pomůcky

Upínací zařízení drátu, osvětlovací souprava s dalekohledem, sada závaží, drát se závěsnou miskou, aparatura na měření průhybu trámku, ocelový a mosazný trámek, závěsná miska.

Postup

Protažení drátu

- 1) Zatížíme drát závažím o hmotnosti 1 kg, aby se vyrovnal.
- 2) Změříme délku drátu l_0 , průměr drátu d (ve více místech), poloměr kladky R a vzdálenost stupnice od zrcadla L .
- 3) Na misku postupně přidáváme závaží o hmotnosti 100 g a odečítáme hodnotu n ze stupnice pomocí dalekohledu.
- 4) Po dosažení největšího zatížení závaží postupně odebíráme a opět odečítáme n .

Průhyb trámku

- 1) Změříme šířku a a výšku b obou trámků a vzdálenost l břitů na aparatuře pro měření průhybu.
- 2) Doprostřed trámku umístíme stupnici a misku na závaží. Postupně přidáváme závaží a odečítáme hodnoty y ze stupnice.
- 3) Po dosažení nejvyššího zatížení závaží postupně odebíráme a znovu odečítáme hodnotu y .
- 4) Postup opakujeme pro oba trámky.

Výsledky měření

Protažení drátu

chybné změření l_0 , $l_0 \approx 114$ až 115 cm

Naměřená délka drátu: (136 ± 1) cm. Chyba je takto vysoká neboť nebylo možné přesně určit, ve kterém bodě je drát uchycen. Vzdálenost zrcátka od stupnice: $(94 \pm 0,3)$ cm. Chyba je odhadnuta z důvodu, že různá místa stupnice mají různou vzdálenost od stupnice a rovněž měření pásmovým měřidlem ve volném prostoru není příliš přesné. Průměr drátu byl měřen mikrometrickým měřidlem (s nejmenším dílkem 0,01 mm) a průměr kladky posuvným měřidlem (s nejmenším dílkem 0,05 mm).

Tab.1: Naměřené hodnoty průměru drátu a kladky

| | d [mm] | r [mm] | D [mm] | R [mm] |
|----------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0,51 | 0,26 | 38,55 | 19,28 |
| 2 | 0,51 | 0,26 | 38,45 | 19,23 |
| 3 | 0,50 | 0,25 | 38,55 | 19,28 |
| 4 | 0,51 | 0,26 | 38,55 | 19,28 |
| 5 | 0,51 | 0,26 | 38,50 | 19,25 |
| 6 | 0,51 | 0,26 | 38,55 | 19,28 |
| 7 | 0,51 | 0,26 | 38,55 | 19,28 |
| 8 | 0,50 | 0,25 | 38,50 | 19,25 |
| 9 | 0,51 | 0,26 | 38,50 | 19,25 |
| 10 | 0,51 | 0,26 | 38,50 | 19,25 |
| průměr | | 0,25 | | 19,26 |
| odchylka | | 0,01 | | 0,05 |

Obě chyby jsou určeny jako chyby měřidla, neboť statistické chyby byly menší.

d – průměr drátu

r – poloměr drátu

D – průměr kladky

R – poloměr kladky

Tab. 2: Prodloužení drátu

| $m \cdot 10^{-2}$ [g] | F [N] | n_{i1} [mm] | n_{i2} [mm] | Δl [μm] | $\sigma_{\Delta l}$ [μm] |
|--------------------------|-------|---------------|---------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 0 | 0,00 | 278 | 278 | 0 | 0 |
| 1 | 0,98 | 275 | 276 | 25,6 | 1,6 |
| 2 | 1,96 | 272 | 273 | 56,3 | 1,6 |
| 3 | 2,94 | 270 | 271 | 76,8 | 1,6 |
| 4 | 3,92 | 267 | 268 | 107,6 | 1,6 |
| 5 | 4,91 | 265 | 266 | 128,1 | 1,6 |
| 6 | 5,89 | 262 | 263 | 158,8 | 1,6 |
| 7 | 6,87 | 260 | 261 | 179,3 | 1,6 |
| 8 | 7,85 | 257 | 258 | 210,0 | 1,6 |
| 9 | 8,83 | 255 | 255 | 235,6 | 1,7 |
| 10 | 9,81 | 252 | 253 | 261,2 | 1,7 |
| 11 | 10,79 | 249 | 250 | 291,9 | 1,7 |
| 12 | 11,77 | 247 | 247 | 317,5 | 1,7 |
| 13 | 12,75 | 244 | 244 | 348,2 | 1,8 |
| 14 | 13,73 | 241 | 241 | 378,9 | 1,8 |
| 15 | 14,72 | 238 | 238 | 409,5 | 1,9 |
| 16 | 15,70 | 236 | 236 | 430,0 | 1,9 |
| 17 | 16,68 | 233 | 233 | 460,7 | 1,9 |
| 18 | 17,66 | 230 | 230 | 491,3 | 2,0 |
| 19 | 18,64 | 227 | 227 | 522,0 | 2,0 |
| 20 | 19,62 | 224 | 225 | 547,5 | 2,1 |
| 21 | 20,60 | 222 | 222 | 573,0 | 2,1 |
| 22 | 21,58 | 220 | 220 | 593,4 | 2,2 |
| 23 | 22,56 | 217 | 216 | 629,2 | 2,2 |
| 24 | 23,54 | 214 | 213 | 659,7 | 2,3 |
| 25 | 24,53 | 211 | 210 | 690,3 | 2,3 |
| 26 | 25,51 | 208 | 208 | 715,8 | 2,4 |
| 27 | 26,49 | 206 | 205 | 741,3 | 2,4 |
| 28 | 27,47 | 203 | 203 | 766,7 | 2,5 |

m – hmotnost závaží

F – síla působící na drát (bylo použito tíhové zrychlené $g=9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$)

n_1 – hodnota na stupnici při přidávání závaží (chyba 1 mm)

n_2 – hodnota na stupnici při odebrání závaží (chyba 1 mm)

Δl – protažení drátu

$\sigma_{\Delta l}$ – chyba protažení vzniklá přenosem chyb

Mezi prodloužením drátu a hmotností závaží platí lineární vztah:

$$\Delta l = k_0 m, \quad (9)$$

kde koeficient k_0 je určen podle (1):

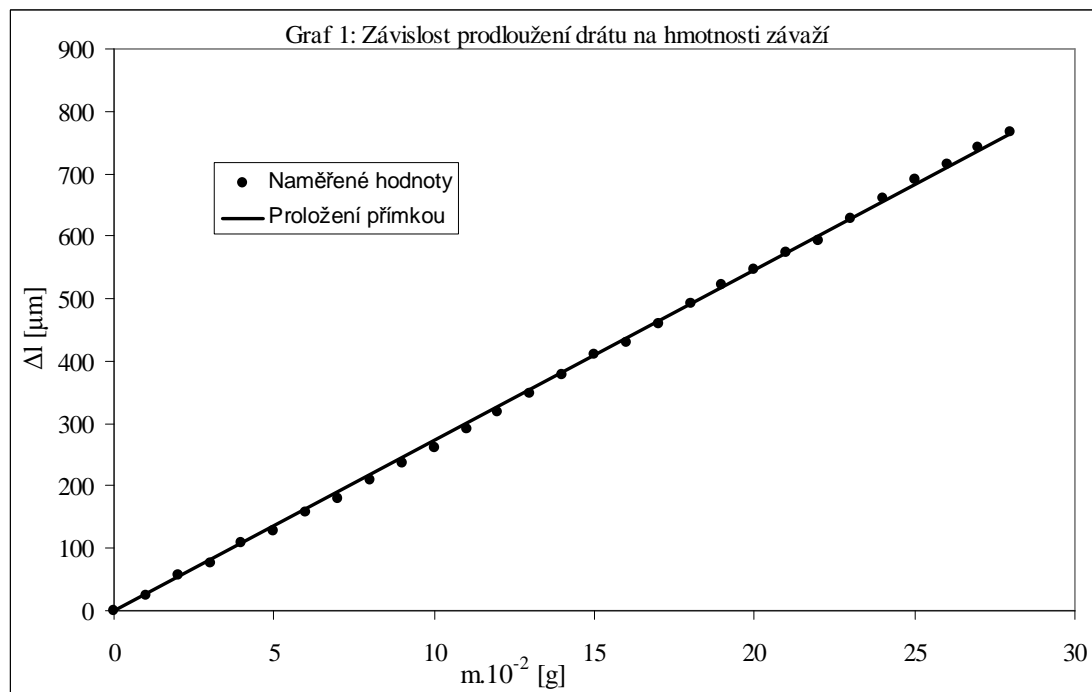
$$k_0 = \frac{l_0 g}{E \pi r^2}. \quad (10)$$

Lineární regresí je určen koeficient jako $k_0 = (27,25 \pm 0,48) \cdot 10^{-5} \text{ m.kg}^{-2}$. Modul pružnosti E je určen ze vztahu (10):

$$E = \frac{l_0 g}{k_0 \pi r^2}, \quad (11)$$

tedy $E = (242 \pm 5) \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Chyba je určena přenesením chyb ze vztahu (11).

Jak jste tuto velmi malou chybu určil?



Průhyb trámku

Vzdálenost břitů, na kterých je položen trámek byla měřena pásmovým měřidlem s nejmenším dílkem 1 mm. Výška a šířka trámku byla měřena mikrometrickým měřidlem s dílkem 0,01 mm.

Tab. 3: Naměřené rozměry trámku a vzdálenost břitů

| | a_o [mm] | b_o [mm] | a_m [mm] | b_m [mm] | l [mm] |
|----------|------------|------------|------------|------------|----------|
| 1 | 11,90 | 2,96 | 11,82 | 1,99 | 411 |
| 2 | 11,80 | 2,96 | 11,80 | 1,99 | 413 |
| 3 | 11,89 | 2,96 | 11,85 | 1,98 | 412 |
| 4 | 11,94 | 2,97 | 11,89 | 1,99 | 413 |
| 5 | 11,92 | 2,97 | 11,89 | 1,98 | 412 |
| 6 | 11,90 | 2,96 | 11,95 | 1,99 | 411 |
| 7 | 11,87 | 2,96 | 11,87 | 1,98 | 411 |
| 8 | 11,90 | 2,96 | 11,80 | 2,00 | 412 |
| 9 | 11,90 | 2,97 | 11,81 | 1,98 | 412 |
| 10 | 11,95 | 2,97 | 11,93 | 1,98 | 411 |
| průměr | 11,90 | 2,96 | 11,86 | 1,99 | 412 |
| odchylka | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 1 |

Chyba b_o , b_m a l je chybou měřidla, chyba a_o a a_m je chybou statistickou, neboť tato v tomto případě je větší.

a_o – šířka ocelového trámku

b_o – výška ocelového trámku

a_m – šířka mosazného trámku

b_m – výška mosazného trámku

l – vzdálenost břitů

Tab. 4: Průhyb ocelového trámku při různém zatížení

| $m \cdot 10^{-2}$ [g] | y_1 [mm] | y_2 [mm] | y [mm] |
|-----------------------|------------|------------|----------|
| 0 | 3,6 | 3,6 | 0,0 |
| 1 | 3,9 | 3,9 | 0,3 |
| 2 | 4,1 | 4,2 | 0,6 |
| 3 | 4,4 | 4,4 | 0,8 |
| 4 | 4,7 | 4,7 | 1,1 |
| 5 | 4,9 | 4,9 | 1,3 |
| 6 | 5,2 | 5,3 | 1,7 |
| 7 | 5,5 | 5,5 | 1,9 |
| 8 | 5,7 | 5,8 | 2,2 |
| 9 | 6,0 | 6,0 | 2,4 |
| 10 | 6,3 | 6,3 | 2,7 |
| 11 | 6,6 | 6,6 | 3,0 |
| 12 | 6,9 | 6,9 | 3,3 |
| 13 | 7,2 | 7,1 | 3,6 |
| 14 | 7,4 | 7,4 | 3,8 |
| 15 | 7,7 | 7,7 | 4,1 |
| 16 | 8,0 | 7,9 | 4,4 |
| 17 | 8,2 | 8,2 | 4,6 |
| 18 | 8,4 | 8,5 | 4,9 |
| 19 | 8,7 | 8,7 | 5,1 |

m – hmotnost závaží
 y_1 – hodnoty na stupnici měření průhybu při přidávání závaží (nejmenší dílek – 0,1 mm)
 y_2 – hodnoty na stupnici průhybu při odebrání závaží
 y – průměrná hodnota průhybu

Tab. 5: Průhyb mosazného trámku při různém zatížení

| m [g] | y_1 [mm] | y_2 [mm] | y [mm] |
|-------|------------|------------|--------|
| 0 | 4,5 | 4,5 | 0,0 |
| 10 | 4,7 | 4,7 | 0,2 |
| 20 | 4,9 | 4,9 | 0,4 |
| 30 | 5,1 | 5,0 | 0,6 |
| 40 | 5,3 | 5,2 | 0,8 |
| 50 | 5,5 | 5,4 | 1,0 |
| 60 | 5,6 | 5,6 | 1,1 |
| 70 | 5,8 | 5,8 | 1,3 |
| 80 | 6,0 | 6,0 | 1,5 |
| 90 | 6,2 | 6,2 | 1,7 |
| 100 | 6,4 | 6,4 | 1,9 |
| 110 | 6,6 | 6,5 | 2,1 |
| 120 | 6,7 | 6,7 | 2,2 |
| 130 | 6,9 | 6,9 | 2,4 |
| 140 | 7,1 | 7,1 | 2,6 |
| 150 | 7,3 | 7,3 | 2,8 |
| 160 | 7,4 | 7,5 | 3,0 |
| 170 | 7,6 | 7,7 | 3,2 |
| 180 | 7,8 | 7,8 | 3,3 |
| 190 | 8,0 | 8,0 | 3,5 |
| 200 | 8,2 | 8,2 | 3,7 |
| 210 | 8,4 | 8,4 | 3,9 |

Popis viz. Tab. 4

Mezi průhybem trámku a hmotností závaží platí lineární vztah:

$$y = km, \tag{12}$$

kde koeficient k je určen podle (7):

$$k = \frac{l^3 g}{4Eab^3}. \tag{13}$$

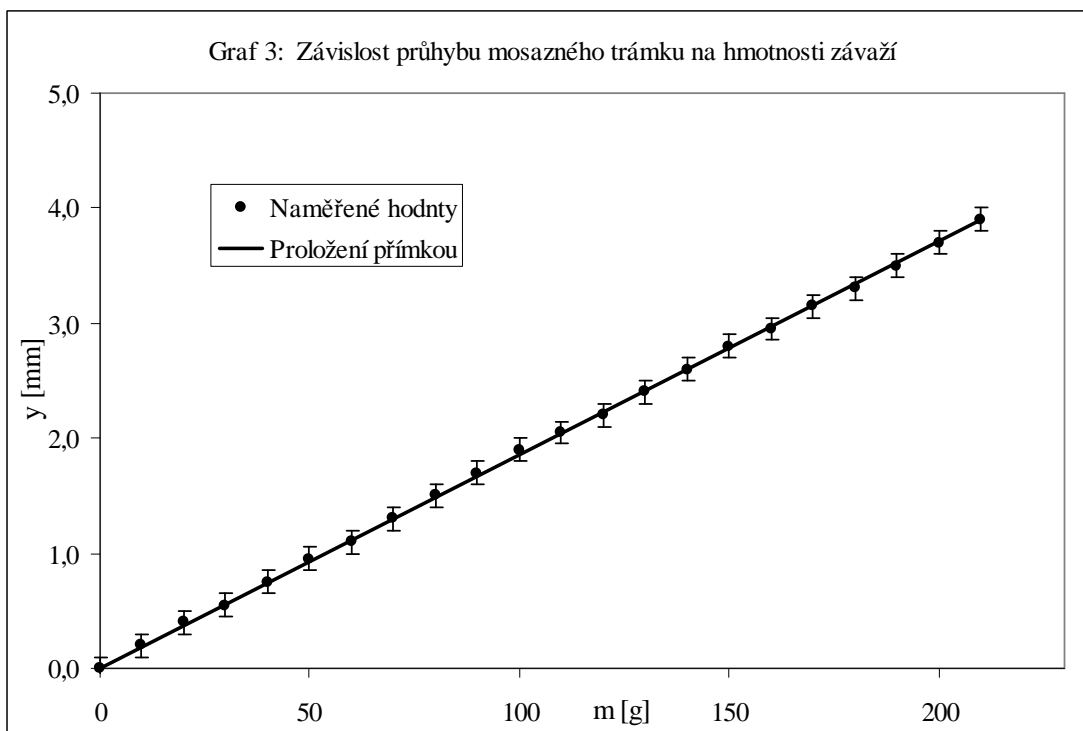
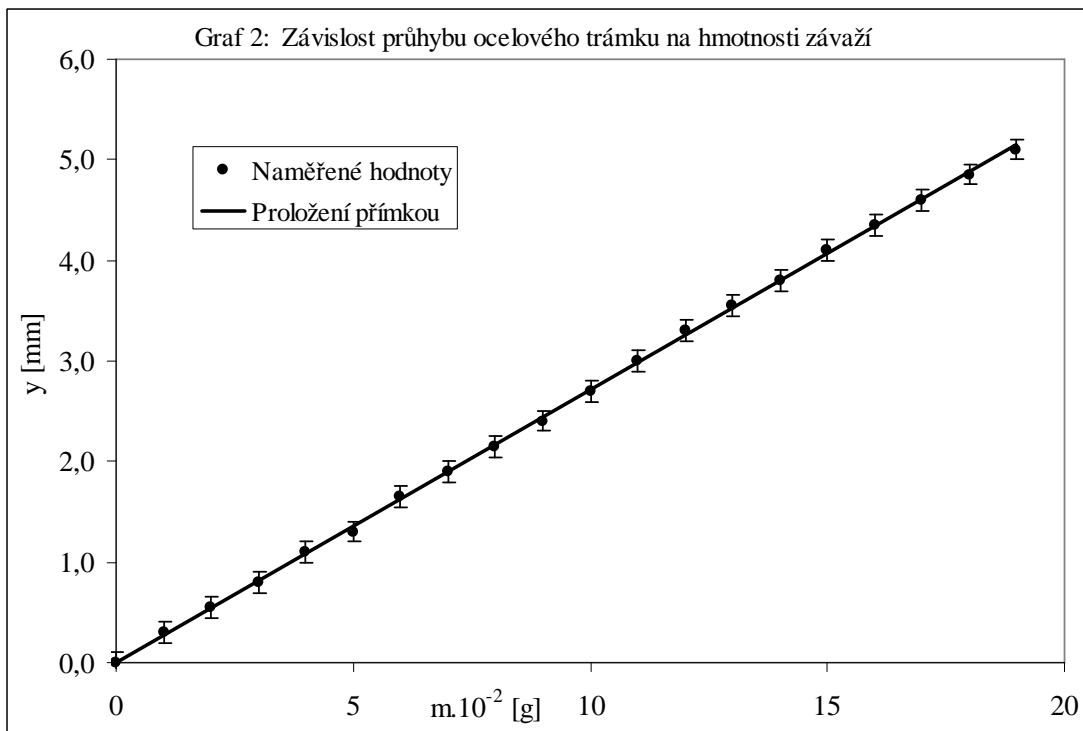
Lineární regresí je určen koeficient k pro ocelový trámek jako $k_o = (27,05 \pm 0,29) \cdot 10^{-4} \text{ m.kg}^{-1}$ (tíhové zrychlení je $9,81 \text{ m.s}^{-2}$) a pro mosazný trámek $k_m = (184,13 \pm 0,19) \cdot 10^{-4} \text{ m.kg}^{-1}$. Modul pružnosti E je určen ze vztahu (13):

$$E = \frac{l^3 g}{4kab^3}, \quad (14)$$

?

?

tedy pro ocelový trámek $E_o = (204 \pm 3) \cdot 10^9$ Pa a pro mosazný trámek $E_m = (100 \pm 1) \cdot 10^9$ Pa
 Chyba je určena přenesením chyb ze vztahu (14).



Diskuse

měření průměru drátu, víte proč?

Na chybě určení modulu pružnosti se podílí u metody prodloužení drátu hlavně chyba vzniklá při měření délky drátu l_0 a při měření protažení Δl . Při měření průhybu trámku pak zejména průhyb y . Tyto chyby však nejsou příliš velké. Rovněž naměřené hodnoty při přidávání a odebírání závaží se neliší více než o jeden dílek stupnice, takže se dají považovat v rámci chyby za stejné. Protože pro všechny naměřené hodnoty bylo velmi dobře možné proložit přímkou, byly splněny podmínky Hookova zákona.

V tabulkách [3] je uvedena hodnota modulu pružnosti E pro ocel 200-210 GPa, v tabulkách [4] 220 GPa, což je obojí méně než námi naměřená hodnota (242 ± 5) GPa. Z rozdílů hodnot v jednotlivých tabulkách však soudím, že jsou mezi různými druhy ocele velké rozdíly a tedy měřený drát je z nějaké odlišné. Metodou průhybu trámku byla naměřena hodnota modulu pružnosti ocele (204 ± 3) GPa, což se s tabulkovými hodnotami shoduje. Tabulková hodnota E mosazi je podle [3] 99 GPa a podle [4] 100-110 GPa, což se rovněž dobře shoduje s naměřenou hodnotou (100 ± 1) GPa.

oceli

Závěr

Změřil jsem modul v pružnosti v tahu ocele metodou protažení drátu (242 ± 5) GPa a metodou průhybu trámku (204 ± 3) GPa. Touto metodou jsem změřil i modul pružnosti mosazi (100 ± 1) GPa.

Literatura

- [1] D. Slavínská, I. Stulíková, P. Ostrý: Fyzikální praktikum I., SPN, Praha 1989
- [2] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I., SPN, Praha 1967
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
- [4] J. Mikulčák a kol.: Matematické, fyzikální, chemické tabulky, SPN, Praha 1970